Урок №2 (06.09.2007)
Энергетические превращения в осцилляторе. Фазовые траектории осциллятора. Аппроксимация малых колебаний гармоническими.

Свободные (собственные) колебания – колебания, возникающие в системе при внешнем воздействии, сводящемся лишь к начальному отклонению системы от состояния устойчивого равновесия.

1. *Энергетические превращения в осцилляторе*

Рассмотрим превращения энергии в идеальной системе «горизонтально колеблющийся груз на пружинке».

Как мы выяснили, движение такого груза описывается следующими уравнениями:

$$\begin{cases} x(t) = -A\cos(\omega t) \\ v(t) = A\omega \sin(\omega t) \end{cases}.$$

При этом потенциальная и кинетическая энергия зависят от времени так:

$$\begin{cases} E_П = \dfrac{kx^2}{2} = \dfrac{kA^2}{2}\cos^2(\omega t) \\ E_К = \dfrac{mv^2}{2} = \dfrac{m\omega^2 A^2}{2}\sin^2(\omega t) \end{cases}$$

, для простоты мы приняли ноль потенциальной энергии в точке равновесия системы.

Т.к. система консервативна, полная энергия системы в любой момент одна и та же:

$$E_П + E_К = \frac{kA^2}{2}\cos^2(\omega t) + \frac{m\omega^2 A^2}{2}\sin^2(\omega t) = \frac{kA^2}{2}\left(\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t)\right) = \tfrac{1}{2}kA^2$$

, мы здесь учли, что $\omega = \sqrt{k/m}$.

График зависимости силы от смещения в случае идеальной пружины (прямая).

График изменения потенциальной энергии пружины.

Сохранение энергии в колеблющейся системе. Фазовая траектория для гармонического осциллятора.

Фазовое пространство – многомерное пространство обобщенных координат и обобщенных импульсов механической системы.

«Потенциальная яма».

2. *Аппроксимация малых колебаний гармоническими*

Для математического маятника $E_П = mgl(1-\cos\theta) = 2mgl\sin^2(\theta/2)$. *При малых углах* $E_П = \dfrac{1}{2}mgl\theta^2$.

Случай негармонических колебаний: поперечные колебания груза между двумя нерастянутыми пружинами. В этом случае $F_{возвр} \simeq \dfrac{k}{l^2}x^3$ (при <u>малых</u> колебаниях). Проанализируем, как должен себя вести период колебаний такого негармонического маятника, воспользовавшись методом размерностей. Рассмотрим сначала гармонический осциллятор. В нем возвращающая сила имеет вид $F=-kx$, а коэффициент k имеет размерность $[k]=Н/м=кг/с^2$, т.е. не содержит длины. Поэтому период колебаний (размерность – секунды), который может зависеть, вообще говоря, от трех величин: амплитуды (метры), массы груза (килограммы), и коэффициента жесткости, будет, с точностью до константы, иметь вид $\sqrt{m/k}$. Т.е. <u>он не зависит от амплитуды</u>! Пусть теперь $F=-\gamma x^3$. Размерность γ содержит длину: $[\gamma]=\frac{Н}{м^3}=\frac{кг}{м^2с^2}$, и для того, чтобы получить размерность времени (период), надо составить комбинацию типа $\frac{1}{A}\sqrt{\frac{m}{\gamma}}$, т.е. период <u>будет</u> зависеть от амплитуды.

3. *Физический маятник*

Момент силы, действующий на физический маятник, относительно точки подвеса равен $\tau=-mgh\sin\theta$, где h – расстояние от точки подвеса до центра тяжести маятника.

По второму закону Ньютона $\tau=I\ddot{\theta}=-mgh\sin\theta$. Полагая угол θ малым, получаем уравнение $\ddot{\theta}+\left(\frac{mgh}{I}\right)\theta=0$.

Отсюда видим, что период малых колебаний физического маятника равен $T=2\pi\sqrt{\frac{I}{mgh}}$.

Мы получили удобный способ измерения момента инерции I для различных тел.

Приведенная длина физического маятника – длина математического маятника с тем же периодом малых колебаний: $L=\frac{I}{mh}$. Точка, располагающаяся на расстоянии L от оси вращения на линии, проходящей через центр масс, называется *центром качаний*. Центр качаний обладает следующими свойствами: 1) он взаимно заменяем с точкой подвеса относительно центра масс, причем период колебаний не меняется; 2) если по маятнику нанести удар по точке центра качаний, то в точке подвеса не возникает силы реакции.

4. *Задачи*

1. Кубик совершает малые колебания в вертикальной плоскости, двигаясь без трения по внутренней поверхности сферической чаши. Определить период колебаний кубика, если внутренний радиус чаши R, а ребро кубика много меньше R.
2. С какой частотой будет колебаться палка массы m и площади поперечного сечения S, плавающая на поверхности воды в вертикальном положении? Плотность воды известна.
3. В U-образной трубке постоянного сечения находится вода. Общая длина заполненной водой части трубки равна $l=20$ см. Чему равен период колебаний воды T при нарушении равновесия?